الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة : جوان 2010

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة : 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضـــــوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. نعتبر المعادلة: (1) $7x+65y=2009$ ، حيث: x و y عددان صحيحان.

أ) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1) فإنّ y مضاعف للعدد 7.

ب) حل المعادلة (1).

2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$.

أ) تحقق أنّ u_n يقبل القسمة على 9 .

ب) حل المعادلة: (2) $\quad (7u_1)x+(u_2)y=126567$ ذات المجهول (x,y)، حيث: x و y عددان صحيحان.

جـ) عيّن الثنائية (x_0,y_0) حل (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0\geqslant 25$.

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,2)$.

1) بيّن أن النقط A و B و C ليست في استقامية.

2) جد معادلة للمستوي (ABC).

3) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

4) (P) المستوي الذي معادلته: $2x+2y+z-2=0$.

أ) بيّن أن: (P) و (ABC) متقاطعان.

ب) بيّن أن: (P) يشمل B و C، ماذا تستنتج ؟

5) عيّن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$.

التمرين الثالث: (04,5 نقطة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: (E) ... $Z^3-3Z^2+3Z-9=0$

1) أ) تحقق أنّ 3 حل للمعادلة (E)، ثم عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث، من أجل كل عدد مركب Z

فإن: $Z^3-3Z^2+3Z-9=(Z-3)(aZ^2+bZ+c)$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A و B و C صور الأعداد المركبة $Z_A=3$ وَ $Z_B=i\sqrt{3}$ وَ $Z_C=-i\sqrt{3}$.

بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) D النقطة التي لاحقتها $Z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ وَ E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

عيّن Z_E لاحقة النقطة E.

4) F النقطة التي لاحقتها $Z_F=1-i\sqrt{3}$.

أ) احسب $\frac{Z_F}{Z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) وَ (OF) متعامدان.

ب) عيّن Z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82<\alpha<2,83$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1} & ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ ، اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O.

2) أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$.

ج) تحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ثم عين حصرا له.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) احسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x\mapsto -x^3$

بيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ وفسر النتيجة هندسيا.

4) أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f).

الموضــوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13.

2- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، يقبل كل من العددين $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ القسمة على 13.

3- عيّن، حسب قيم n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13.

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$.

أ- من أجل $p=3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

ب- برهن أنه إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13.

جـ- عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n+2$.

5- يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي:

$a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$

أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 .

التمرين الثاني: (05 نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. نسمي A ، B و I النقط التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A=1-4i$ ، $Z_B=-1-2i$ و $Z_I=1-2i$

أ- علّم النقط A ، B و I.

ب- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z=\dfrac{Z_I-Z_A}{Z_I-Z_B}$.

جـ- ما هو نوع المثلث IAB ؟

د- C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 . احسب اللاحقة Z_C للنقطة C .

هـ- D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$. احسب اللاحقة Z_D للنقطة D .

و- بيّن أن $ABCD$ مربع.

2. عيّن وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|$.

3. عيّن وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=1$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(-1;2;1)$ ، $B(2;1;3)$
، $C(0;-1;2)$ ، ولتكن (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $AM=BM$.

1- بيّن أنّ (P) هو المستوي الذي معادلته: $3x-y+2z-4=0$.

2 - عيّن معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل A ويوازي (P).

3- أ - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P).

ب - عيّن إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D).

جـ - احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D).

4- عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (Π) الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P)، ثم استنتج معادلة له.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x-1-2\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي $4cm$.

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2- أ - بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة g .

جـ- احسب $g(1)$.

د- برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث: $3,5<\alpha<3,6$

هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=-x^2+x+x^2\ln x \;;\; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

جـ- بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

د- شكل جدول تغيرات الدالة f ، بين أن: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

4- ارسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على المجال $[0;3]$.

الإجابة النموذجية و سلم التنقيط

امتحان شهادة البكالوريا دورة : **2010**

اختبار مادة : **الرياضيات** الشعب(ة): **رياضيات**

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
	الموضوع الأول		
الحساب	**التمرين الأول: (04 نقط)** 1. أ- إثبات أنّ y مضاعف للعدد 7 ب- حل المعادلة (1) هي (x,y) حيث $(x,y)=(287-65k,7k)$ مع $k\in\mathbb{Z}$ 2. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 : لدينا $2^{6p+w}\equiv 2^w\ [9]$ حيث $0\leqslant w\leqslant 5$ ومنه البواقي على الترتيب هي: 1 ، 2 ، 4 8 ، 7 ، 5 3. قيم n المطلوبة هي $n=2+3k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ 4. أ- التحقق أنّ u_n يقبل القسمة على 9 ب- حلول المعادلة (2) هي حلول المعالة (1) ج- $7k\geqslant 25$ و $287-65k\geqslant 0$ منه $3,57\leqslant k\leqslant 4,41$ إذن $k=4$ $(x_0,y_0)=(27,28)$	2×0.25 2×0.25 1 0.5 0.25 0.5 2×0.25 0.25	04
الهندسة الفضائية مستقيمات المستويات سطح كرة	**التمرين الثاني: (04,5 نقط)** 1. A و B و C ليست في استقامية ($\overrightarrow{AC}$ لا يوازي $\overrightarrow{AB}$) 2. تعيين شعاع عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$: $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. ومنه $x+2y+z-2=0$. 3. تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) $\begin{cases}x=0\\y=1-k\ ;\ k\in\mathbb{R}\\z=2k\end{cases}$ 4. أ) (P) و (ABC) متقاطعان لأن شعاعيهما الناظمين غير متوازيين. ب- B و C تنتميان إلى (P) (بتعويض الإحداثيات) نستنتج أنّ $(ABC)\cap(P)=(BC)$ 5. تحليليا (E) $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)=\frac{21}{9}$ هندسيا : (E) : $MG=AG$ حيث G مركز ثقل المثلث ABC (E) سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $AG=\frac{\sqrt{21}}{3}$	0.5 0.75 0.5 0.5 0.5 0.5 0.25 0.5 0.5	04.5

169

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
		مجزأة	مجموع
الأعداد المركبة - تحويلات نقطية	**التمرين الثالث: (4.5 نقطة)** 1) أ) 3 حل للمعادلة ، $a=1$ ، $b=0$ ، $C=3$ ب) الحلول $-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 3$ 2) ABC متقايس الأضلاع 3) $Z_E=-\sqrt{3}-i$ 4) أ) $\frac{Z_F}{Z_E}=i$ ، (OE) و (OF) متعامدان ب) $Z_G=1-\sqrt{3}-i\left(1+\sqrt{3}\right)$	4×0.25 3×0.25 0.75 0.5 2×0.5 0.5	4.5
دراسة تغيرات دوال أسية وتمثيلها بيانيا معادلة المماس مبرهنة القيم المتوسطة الحصر التزايد المقارن	**التمرين الرابع: (07 نقط)** I) 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ $g'(x)=(2-x)e^x$ وإشارته جدول التغيرات 2) $g(0)=0$ تطبيق نظرية القيمة المتوسطة على g في $[2,82 ; 2,83]$ 3) إشارة $g(x)$: - 0 + α - II) 1) f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ معادلة (T) هي $y=0$ 2/ أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=-27\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{x}{3}e^{-\frac{x}{3}})^3=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ب) $x\neq 0$ $f'(x)=\frac{x^2}{\left(e^x-1\right)^2}g(x)$ ، إشارته جـ) $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ، $1.35\le f(\alpha)\le 1.45$ د) جدول التغيرات 3) من أجل $x\neq 0$ $f(x)+x^3=\frac{x^3e^x}{e^x-1}$ وإشارته الوضعية (C_f) أعلى (فوق) (C) ويشتركان في المبدأ O. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ ، C_f يقارب C في جوار $-\infty$ 4) رسم (T) ، (C) ، (f).	2×0.25 2×0.25 0.25 2×0.25 0.25 0.25 0.25 2×0.25 2×0.5 2×0.25 0.25 2×0.25 0.25 2×0.25 1	07



محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
الموافقات في $\mathbb{Z}$	**التمرين الأول: (04 نقاط)** 1)برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13 باستعمال الموافقة أو البرهان بالتراجع 2)الاستنتاج 3)من أجل $n=3k\,;k\in\mathbb{N}$ فإن باقي قسمة 3^n على 13 هو 1 من أجل $n=3k+1;k\in\mathbb{N}$ فإن باقي قسمة 3^n على 13 هو 3 من أجل $n=3k+2;k\in\mathbb{N}$ فإن باقي قسمة 3^n على 13 هو 9 باقي قسمة 2005^{2010} على 13 هو 1 4)-أ- باقي قسمة A_p على 13 من أجل $p=3n$ هو 3 ب- برهان باقي قسمة A_p على 13 من أجل $p=3n+1$ هو 0 ج- باقي قسمة A_p على 13 من أجل $p=3n+2$ هو 0 5) -أ- $a=A_3;b=A_4$ -ب- باقي قسمة a على 13 هو 3 باقي قسمة b على 13 هو 0	0.25×3 2×0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25×2 0.25 0.25	04
أعداد مركبة وهندسة	**التمرين الثاني: (05 نقاط)** 1)-أ- تعليم النقط ب- $Z=i$ جـ- IAB مثلث قائم في I ومتقايس الساقين د- $z_C=1$ هـ- $z_D=3-2i$ و- $ABCD$ مربع 2) (Γ_1) معرفة بـــ $MD=MI$ أو $x=0$ فهي محور القطعة $[DI]$. 3) (Γ_2) معرفة بـــ $MD=1$ أو $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ ، (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها 1.	0.25×3 0.25 0.25×2 0.25×2 0.25×2 0.25×4 0.25×4 0.25×2	05
هندسة فضائية	**التمرين الثالث: (04 نقاط)** 1) (P) معادلته : $3x-y+2z-4=0$ 2) $3x-y+2z+3=0$ معادلة المستوى (Q) 3) أ- (D) : $\begin{cases}x=3t\\y=-1-t\\z=2+2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ ب- $E(-\frac{12}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7})$ ج- المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) هي $AE=\frac{\sqrt{315}}{7}$. 4) $\begin{cases}x=-1+t+3\lambda\\y=2-3t-\lambda\\z=1+t+21\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ t ، λ عددان طبيعيان (Π) : $5x-y-8z+15=0$	01 0.75 0.5 0.5 0.25 0.5 0.5	04

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	مجزأة	مجموع
دوال لوغاريتمية	**التمرين الرابع:** (07 نقاط)		07
	1) $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = +\infty$	0.25	
	$x = 0$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_g)	0.25	
	2)-أ- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	0.5	
	ب- دراسة تغيرات الدالة g		
	$g'(x) = \frac{x-2}{x}$ وإشارته (0 - 2 +)	0.5	
	جدول التغيرات	0.25	
	جـ- $g(1) = 0$	0.25	
	د- $g(\alpha) = 0$: $3.5 < \alpha < 3.6$	0.75	
	هـ- إشارة $g(x)$	0.5	
	إشارة $g(\frac{1}{x})$ (0 + $\frac{1}{\alpha}$ - 1 +)	0.5	
	3)-أ- $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ مع التفسير الهندسي	0.5	
	ب- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	0.25	
	جـ- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$	0.5	
	اتجاه تغير f	0.25	
	د- جدول تغيرات الدالة f	0.25	
	تبيين أن : $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$	0.5	
	$0.096 < f(\frac{1}{\alpha}) < 0.106$	0.5	
	4) رسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في المعلم السابق	0.5	
	الرسم :		

172